数理解析研究所講究録
17巻 1966年 53-78

方形に対する偏差分方程式を解くための直接法

広大 理 新谷尚義

§1 差分近似

方形領域

$$R: \ x_0 < x < X, \quad y_0 < y < Y,$$
$$(X = Mh, \ Y = Nh; \quad M = m+1, \ N = n+1)$$

の内部で方程式

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{1.1}$$

をみたし，境界上で

$$u(x,y) = \varphi(x,y) \tag{1.2}$$

となる函数 $u(x, y)$ を求める問題を考える.

$$x_i = x_0 + ih, \ (i=0,1,\ldots,M),$$
$$y_j = y_0 + jh, \ (j=0,1,\ldots,N)$$

とし，格子点 (x_i, y_j) での函数値 $u(x_i, y_j)$ を使って偏微分を差分近似する.

(i) 5点公式

点 (x_i, y_j), $(1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n)$ の隣りの東西南北の格子点での函数値を使うと，

$$u(x_i+h, y_j) + u(x_i-h, y_j) - 2u(x_i, y_j) \tag{1.3}$$
$$= h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, y_j) + \frac{2}{4!} h^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i + \xi_i, y_j)$$
$$(|\xi_i| < h)$$

(1.4)
$$u(x_i,\ y_j+h) + u(x_i,\ y_j-h) - 2u(x_i,\ y_j)$$
$$= h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_i,\ y_j) + \frac{2}{4!}h^4\frac{\partial^4}{\partial y^4}u(x_i,\ y_j+\gamma_j),\ (|\gamma_j|<h)$$

(1.5)
$$u(x_{i-1},\ y_j) + u(x_{i+1},\ y_j) + u(x_i,\ y_{j-1})$$
$$+ u(x_i,\ y_{j+1}) - 4u(x_i,\ y_j)$$
$$= h^2\Delta u(x_i,\ y_j) + h^4T(x_i,\ y_j)$$
$$= h^2\ f(x_i,\ y_j) + h^4T(x_i,\ y_j)$$

が得られる. ただし

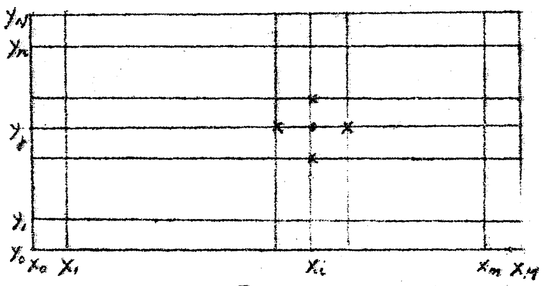

図 1.

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

図 2

(1.6)
$$T(x_i,\ y_j) = \frac{2}{4!}\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i+\xi_i,\ y_j) + \frac{\partial^4}{\partial y^4}u(x_i,\ y_j+\gamma_j)\right]$$

である. (5)式の左辺を

(1.7)
$$u(x_i,\ y_j) = u_{ij},\quad f(x_i,\ y_j) = f_{ij},$$
$$\varphi(x_i,\ y_j) = \varphi_{ij},\quad T(x_i,\ y_j) = T_{ij}.$$

(1.8)
$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ \\ u_{in} \end{pmatrix},\ \mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} h^2f_{i1} - \varphi_{i0} \\ h^2f_{i2} \\ h^2f_{in-1} \\ h^2f_{in} - \varphi_{iN} \end{pmatrix},\ \mathbf{t}_i = \begin{pmatrix} T_{i1} \\ \vdots \\ \\ T_{in} \end{pmatrix},\ \varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_{01} \\ \vdots \\ \\ \varphi_{0m} \end{pmatrix},\ \varphi_M = \begin{pmatrix} \varphi_{M1} \\ \vdots \\ \\ \varphi_{Mn} \end{pmatrix}$$

とおくことにする．$u_{i0}=\varphi_{i0}$, $u_{iM}=\varphi_{iM}$, $u_{0j}=\varphi_{0j}$, $u_{Nj}=\varphi_{Nj}$ だから，これらを右辺にうつして，(5) 式を行列でかくと次のようになる．

(1.9)
$$\mathbf{u}_{i-1}-4\mathbf{u}_i+\mathbf{u}_{i+1}+\begin{bmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{bmatrix}\mathbf{u}_i+\begin{bmatrix}0&&&0\\1&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\\0&&1&0\end{bmatrix}\mathbf{u}_i$$
$$=\mathbf{u}_{i-1}-A\mathbf{u}_i+\mathbf{u}_{i+1}=\mathbf{g}_i+h^4\mathbf{t}_i\ ,\quad (i=2,3,\dots,n-1)$$

ただし

(1.10)
$$A=\begin{bmatrix}4&-1&&0\\-1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&-1\\0&&-1&4\end{bmatrix}$$

である．

$i=1,m$ に対しては $\mathbf{u}_0=\varphi_0$, $\mathbf{u}_M=\varphi_M$ だから

(1.11)
$$-A\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=\mathbf{g}_1-\varphi_0+h^4\mathbf{t}_1$$

(1.12)
$$\mathbf{u}_{m-1}-A\mathbf{u}_m=\mathbf{g}_m-\varphi_M+h^4\mathbf{t}_m$$

となる．

(1.13)
$$\mathbf{b}_1=\mathbf{g}_1-\varphi_0,\quad \mathbf{b}_m=\mathbf{g}_m-\varphi_M,\quad \mathbf{b}_i=\mathbf{g}_i$$
$$(i=2,3,\dots,m-1)$$

とおけば，(5) 式は次のようにかける．

(1.14)
$$\begin{bmatrix}-A&I&&\\I&-A&I&\\&\ddots&\ddots&I\\&&I&-A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\\mathbf{u}_2\\\vdots\\\mathbf{u}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\\mathbf{b}_2\\\vdots\\\mathbf{b}_m\end{bmatrix}+h^4\begin{bmatrix}\mathbf{t}_1\\\mathbf{t}_2\\\vdots\\\mathbf{t}_m\end{bmatrix}$$

u_{ij} の代りに未知数 v_{ij} を導入して，$\mathbf{v}_i^T=(v_{i1},\dots,v_{in})$ とおき，(14) 式に対応して次の偏差分方程式を考える．

(1.15)
$$
\begin{bmatrix}
-A & I & & & 0 \\
I & -A & I & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& 0 & & \ddots & I \\
& & & I & -A
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m
\end{bmatrix}
$$

これは $\mathbf{b}_i$ が既知だから解ける

$\mathbf{z}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i$ とおくと，差分近似による誤差は次の式で与えられる.

$$
\begin{bmatrix}
-A & I & 0 \\
I & \ddots & I \\
0 & I & -A
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_m
\end{bmatrix}
= -h^4
\begin{bmatrix}
\mathbf{t}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m
\end{bmatrix}
$$

$h \longrightarrow 0$ のとき，$\|\mathbf{z}_i\| \longrightarrow 0$ でなければ，偏微分方程式の差分近似にはならない.

(ii) 9点公式

点 (x_i, y_j) の斜め隣りの4点を使うと

(1.16)
$$
\begin{aligned}
& u(x_{i-1}, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j+1}) \\
& \quad + u(x_{i+1}, y_{j+1}) - 4u(x_i, y_j) \\
& = 2h^2 \Delta u(x_i, y_j) + \frac{4h^4}{4!}\Big[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& \quad + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\Big](x_i, y_j) + O(h^6)
\end{aligned}
$$

が得られる. $f(x, y) \equiv 0$ で (1) 式が

(1.21)
$$\Delta u(x, y) = 0$$

の場合には、

$$(1.22) \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

だから、(5) 式の4倍を (20) 式に加えると

$$(1.23) \qquad \begin{aligned} &u(x_{i-1}, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j+1}) \\ &+ u(x_{i+1}, y_{j+1}) + 4[u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) \\ &+ u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j+1})] - 20u(x_i, y_j) \\ &= O(h^6) \end{aligned}$$

となる。(23) 式は図式的に図3のように書ける。

$$(1.24) \qquad A = \begin{pmatrix} 20 & -4 & & 0 \\ -4 & 20 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -4 \\ 0 & & -4 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1	4	1
4	-20	4
1	4	1

図 3

とおくと、対応する偏差分方程式は次のようになる。

$$(1.25) \qquad \begin{pmatrix} -A & B & & O \\ B & -A & B & \\ & \ddots & \ddots & B \\ O & & B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

一般の線型楕円型の方程式

$$(1.26) \qquad \begin{aligned} &a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} \\ &+ d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + g(x, y)u = f(x, y) \end{aligned}$$

の場合には、関係式

$$(1.27) \qquad u(x_{i-1}, y_{j-1}) - u(x_{i+1}, y_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{j+1})$$

$$-u(x_{i-1},\ y_{j+1})$$
$$= 4h^2 u_{xy}(x_i,\ y_j) + 0(h^4)$$

(1.28) $$u(x_{i+1},\ y_j) - u(x_{i-1},\ y_j)$$
$$= 2hu_x(x_i,\ y_j) + 0(h^3)$$

(1.29) $$u(x_i,\ y_{j+1}) - u(x_i,\ y_{j-1})$$
$$= 2hu_y(x_i,\ y_j) + 0(h^3)$$

を使うと，対応する図式は 図4 のようになる．

(1.30)
$$\begin{array}{c|ccc|}
j-1 & \frac{1}{2}b_{ij}, & c_{ij}-\frac{h}{2}e_{ij}, & -\frac{1}{2}b_{ij} \\
j & a_{ij}-\frac{h}{2}d_{ij}, & -2a_{ij}-2c_{ij}+h^2 g_{ij}, & a_{ij}+\frac{h}{2}d_{ij} \\
j+1 & -\frac{1}{2}b_{ij}, & c_{ij}+\frac{h}{2}e_{ij}, & \frac{1}{2}b_{ij} \\
\hline
 & i-1 & i & i+1
\end{array}$$

図 4

(1.31)
$$A_i = \begin{pmatrix} & \ddots & & \\ 0,\ldots,0, & -c_{ij}+\frac{h}{2}e_{ij}, \ 2a_{ij}+2c_{ij}-h^2 g_{ij}, \ -c_{ij}-\frac{h}{2}e_{ij}, & 0,\ldots,0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

(1.32)
$$B_i = \begin{pmatrix} & \ddots & & \\ 0,\ldots,0, & -\frac{1}{2}b_{ij}, \ a_{ij}+\frac{h}{2}d_{ij}, \ \frac{1}{2}b_{ij}, & 0,\ldots,0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

(1.33)
$$C_i = \begin{pmatrix} & \ddots & & \\ 0,\ldots,0, & \frac{1}{2}b_{ij}, \ a_{ij}-\frac{h}{2}d_{ij}, \ -\frac{1}{2}b_{ij}, & 0,\ldots,0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

とおくと，対応する偏微分方程式は次のようになる．

$$
(1.34)\qquad
\begin{bmatrix}
-A_1, & B_1 & & & O \\
C_2, & -A_2, & B_2 & & \\
 & & \ddots & & \\
O & & C_{m-1}, & -A_{m-1}, & B_{m-1} \\
 & & & C_m, & -A_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{m-1} \\ \mathbf{v}_m
\end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{m-1} \\ \mathbf{b}_m
\end{bmatrix}
$$

A_i, B_i, C_i は3重対角行列であり，(34)式の係数行列はブロック3重対角行列である．このような、0要素の多い疎な行列の逆行列は、一般に0要素の少ないつまった行列になる．しかも一行にたかだか9個の要素しかなく，しかもそれらの現われる位置も規則的だから、この行列を記憶するには $(mn)^2$ 個の代りに 9mn 個の記憶場所があればよいことになる．これ以外の理由もあって，通常(34)式は反復法で解かれ直接法は滅多に使われない．しかしながら，直接法には(34)式の行列を行列を行列の直積に分解する hypermatrix method と tensor product method や平方根法などがある．ここでは直接法について述べる．

§2 Dirichlet 問題

(1.34)式の $\mathbf{v}_i$ を $\mathbf{x}_i$ と書き直し，連立の形に書くと次のようになる．

$$
(2.1)\qquad
\begin{cases}
A_1\mathbf{x}_1 - B_1\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1 \\
-C_k\mathbf{x}_k + A_k\mathbf{x}_k - B_k\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k,\ (k=2,3,\dots,m-1) \\
-C_m\mathbf{x}_m + A_m\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_m
\end{cases}
$$

方程式(2.1)が一意的な解をもつとし，B_k, $(k=1,2,\dots,m-1)$ が正則であると仮定する．また $B_m = I$ とする．そのとき

$$(2.2)\qquad P_0 = I, \quad P_1 = B_1^{-1}A_1$$

$$(2.3)\qquad P_k = B_k^{-1}(A_kP_{k-1} - C_kP_{k-2}), \quad (k=2,3,\ldots,m)$$

$$(2.4)\qquad q_0 = 0, \quad q_1 = B_1^{-1}b_1$$

$$(2.5)\qquad q_k = B_k^{-1}(A_kq_{k-1} - C_kq_{k-2} + b_k), \quad (k=2,3,\ldots,m)$$

によって、行列 P_k とベクトル q_k を定義すると (1) 式は次のようにかき直される.

$$(2.6)\qquad \begin{cases} x_{k+1} = P_kx_1 - q_k, (k=1,2,\ldots,m) \\ x_{m+1} = 0 \end{cases}$$

したがって x_1 は

$$(2.7)\qquad x_1 = P_m^{-1}q_m$$

で与えられる. B_k は対角または3重対角行列だから. P_k, q_k は容易に求まり、n 個の未知数をもつ連立1次方程式を解く問題に帰着される.

x_1 が求まると

$$(2.8)\qquad \begin{cases} B_2x_3 = A_2x_2 - (Cx_1 + b_1) \\ B_kx_{k+1} = A_kx_k - C_kx_{k-1} - b_k, \quad (k=3,\ldots,m) \\ x_{m+1} = 0 \end{cases}$$

から x_2 が求められる.

C_k, $(k=2,3,\ldots,m)$ も正則な場合には

$$(2.9)\qquad \begin{cases} C_mx_{m-1} = A_mx_m - b_m \\ C_kx_{k-1} = A_kx_k - B_kx_{k+1} - b_k, \quad (k=m-1,m-2,\ldots,1) \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

から $\mathbf{x}_m$ を求め，(1) 式を

$$
(2.10)\quad \begin{cases} A_2\mathbf{x}_2 - B_2\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_2 + C_2\mathbf{x}_1 \\ -C_k\mathbf{x}_{k-1} + A_k\mathbf{x}_k - B_k\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}_k, \ (k=3,\ldots,m-2) \\ -C_{m-1}\mathbf{x}_{m-2} + A_{m-1}\mathbf{x}_{m-1} = \mathbf{b}_{m-1} + B_{m-1}\mathbf{x}_m \end{cases}
$$

に帰着させる方がよいように思われる．

A_k, B_k, C_k が次の形の場合は，ずっと簡単になる．

$$
(2.11)\quad A_k = a_kI + \alpha_kJ, \quad B_k = b_kI + \beta_kJ, \quad C_k = c_kI + \gamma_kJ
$$

ただし

$$
(2.12)\quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

である．このとき

$$
(2.13)\quad T = (t_{ij}), \quad t_{ij} = \sin ij\theta, \quad \theta = \pi/N.
$$

$$
(2.14)\quad G = \mathrm{diag}\,(\cos\theta, \cos 2\theta, \ldots, \cos n\theta).
$$

とおくと

$$
(2.15)\quad A_k = T^{-1}(a_kI + 2\alpha_kG)T, \quad B_k = T^{-1}(b_kI + 2\beta_kG),
$$
$$
C_k = T^{-1}(c_kI + 2\gamma_kG)
$$

が成りたつから，(1) 式は次のようにかき直される．

$$
(2.16)\quad \begin{cases} \mathbf{y}_2 = D_1\mathbf{y}_1 - \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{y}_{k+1} = D_k\mathbf{y}_k - E_k\mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{g}_k, \ (k=2,3,\ldots,m) \\ \mathbf{y}_{m+1} = 0 \end{cases}
$$

ただし

(2.17) $$F_k = (b_k I + 2\beta_k G)^{-1}, \quad D_k = F_k(a_k I + 2\alpha_k G),$$
$$E_k = F_k(c_k + 2\gamma_k G)$$

(2.18) $$g_k = F_k T b_k, \quad y_k = T x_k$$

である．

(2.19) $$P_0 = I, \quad P_1 = D_1$$

(2.20) $$P_k = D_k P_{k-1} - E_k P_{k-2}, \ (k=2,3,\ldots,m)$$

(2.21) $$q_0 = 0, \quad q_1 = g_1$$

(2.22) $$q_k = D_k q_{k-1} - E_k q_{k-2} + g_k, \ (k=2,3,\ldots,m)$$

とおくと，$T^{-1} = \frac{2}{N} T$ だから x_1 は

(2.23) $$x_1 = \frac{2}{N} T P_m^{-1} g_m$$

で与えられる．

F_k, E_k, D_k は対角行列だから，P_k も対角行列で P_m^{-1} は容易に求められる．また行列 T の各要素を記憶する必要はなく，$f^T = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ とすると，$r_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} f_j$ は次の漸化式で求められる．

(2.24) $$p_n = p_{n+1} = 0$$

(2.25) $$p_k = (2 \cos i\theta) p_{k+1} - p_{k+2} + f_{k+1}, \ (k=n-1, n-2, \ldots, 0)$$

(2.26) $$r_i = p_0 \sin i\theta$$

また，

(2.27) $$a_k = a, \quad \alpha_k = \alpha, \quad b_k = c_k = b,$$
$$\beta_k = \gamma_k = \beta, \quad (k=1,2,\ldots,m)$$

の場合は，もっと簡単になる．$D_k = D$ とおくことにし，多項式 $P_i(x)$ $(i = 0,1,\ldots,m)$ を次の式によって定義する．

(2.28) $$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x$$

(2,29) $$P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x), \quad (k=1,2,\ldots,m-1)$$

すると，

(2.30) $$P_k = P_k(D), \quad q_k = \sum_{i=1}^{k} p_{k-i}g_i$$

となり，

(2.31) $$y_k = P_{m+1-k}^{-1}[P_{m-k}y_{k-1} + \sum_{i=k}^{m} P_{m-i}g_i], \quad (k=1,2,\ldots,m)$$

が得られる．ただし $y_0 = y_{m+1} = 0$ である．そして (1) 式の解は

(2.32) $$x_k = \frac{2}{N} Ty_k, \quad (k=1,2,\ldots,m)$$

で与えられる．

この numerical process が安定であるためには，$P_{m+1-k}^{-1}P_j$, $(j=1,2,3,\ldots,m-k)$ の固有値の絶対値が1以下でなければならない．よく知られているように

(2.33) $$P_k(x) = \begin{cases} \sinh (k+1)\mu/\sinh\mu, & 2\cosh\mu = x, \ (x>2) \\ (\frac{x}{2})^k(1+k), & (|x|=2) \\ \sin (k+1)\mu/\sin\mu, \quad 2\cos\mu = x, & (|x|<2) \\ (-1)^k\sinh (k+1)\mu/\sinh\mu, \quad 2\cosh\mu = |x|, & (x<-2) \end{cases}$$

である．したがって，

(2.34) $$D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$$

とすると，

(2.35) $$|\lambda_i| \geq 2, \ (i=1,2,\ldots,n)$$

ならば安定である.

たとえば、5点公式の場合には

(2.36) $$\lambda_i = 4 - 2\cos i\theta = 2(1 + 2\sin^2\frac{i\theta}{2}) \geq 2.$$

9点公式の場合には

(2.37) $$\lambda_i = \frac{20 - 8\cos i\theta}{4 + 2\cos i\theta} = 2 + \frac{6(1-\cos i\theta)}{2 + \cos i\theta} \geq 2.$$

だから、いずれの場合も process(2.31) は安定である.

(2.38) $$y_1 = P_m^{-1}\sum_{i=1}^{m} p_{m-i}g_i$$

を

(2.39) $$y_k = P_{k-1}y_1 - \sum_{i=k-1}^{m} p_{k-1-i}g_i$$

に代入し、関係式

(2.40) $$P_r(x)P_{m-i}(x) - P_m(x)P_{r-i}(x) = P_{m-r-1}(x)P_{i-1}(x)$$

を使うと、x_k を次の形にかくことができる.

(2.41) $$x_k = \frac{2}{N}TP_m^{-1}[P_{m-k}\sum_{i=1}^{k-1} p_{i-1}g_i + P_{k-1}\sum_{i=k}^{m} p_{m-i}g_i]$$

$$(k=1,2,\ldots,m)$$

§3 周期的境界问題

3.1 Poisson の方程式

K.W.Hockney は (1.1) と周期的境界条件

$$
(3.1)\qquad \begin{cases} u(x_0, y) = u(X, y), & (y_0 \le y \le Y) \\ u(x, y_0) = u(x, Y), & (x_0 \le x \le X) \end{cases}
$$

をみたす解を求める問題を得に、それは次の形の方程式を解く問題に帰着される。

$$
(3.2)\qquad \begin{cases} A\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_m = \mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{x}_{k-1} + A\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}_k, \quad (k=2,3,\dots,m-1) \\ -\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{m-1} + A\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_m \end{cases}
$$

ただし

$$
(3.3)\qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 4 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}
$$

である。

$$
(3.4)\qquad H = \mathrm{diag}\,(1, \cos\theta, \cos 2\theta, \dots, \cos (n-1)\theta)
$$

$$
(3.5)\qquad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1, & \cos\theta, & & \cos(n-1)\theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1, & \cos(\ell-1)\theta, & & \cos(n-1)(\ell-1)\theta \\ \delta, & \delta\cos\ell\theta, & & \delta\cos(n-1)\ell\theta \\ 0, & \sin(\ell+1)\theta, & & \sin(n-1)(\ell+1)\theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & \sin(n-1)\theta, & & \sin(n-1)(n-1)\theta \end{bmatrix}
$$

とおく。ただし

$$\theta = \frac{2\pi}{n}, \qquad \delta = \begin{cases} 1 & (n:\ \mathrm{odd}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & (n:\ \mathrm{even}) \end{cases} \tag{3.6}$$

で, ℓ は $n/2$ を越えない最大の整数である. すると

$$A = R^{-1}DR, \quad D = 4I - 2H, \quad R^{-1} = \frac{2}{n} R^{T} \tag{3.7}$$

が成り立ち. (3.2) は次のようにかき直される.

$$\begin{cases} Dy_1 - y_2 - y_m = g_1 \\ -y_{k-1} + Dy_k - y_{k+1} = g_k, \quad (k=2,3,\ldots,m) \\ y_{m+1} = y_1 \end{cases} \tag{3.8}$$

$$y_j = Rx_j, \quad g_j = Rb_j, \quad (j=1,2,\ldots,m) \tag{3.9}$$

$P_j(D)$ を P_j とかくことにすると

$$y_{k+1} = P_k y_1 - P_{k-1} y_m - \sum_{i=1}^{k} p_{k-i} g_i \quad (k=1,2,\ldots,m) \tag{3.10}$$

が成り立つ. これから次の式が得られる.

$$\begin{cases} P_{m-1} y_m = (P_m - I) y_1 - \sum_{i=1}^{m} p_{m-i} g_i \\ (I + P_{m-2}) g_m = P_{m-1} y_1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_{m-1-i} g_i \end{cases} \tag{3.11}$$

したがって.

$$\triangle y_1 = (I + P_{m-2}) \sum_{i=1}^{m} p_{m-i} g_i - P_{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} p_{m-1-i} g_i \tag{3.12}$$

$$\triangle y_m = P_{m-1} \sum_{i=1}^{m} p_{m-i} g_i - (P_m - I) \sum_{i=1}^{m-1} p_{m-1-i} g_i \tag{3.13}$$

が得られる. ただし

(3.14) $$\Delta = (I + P_{m-2})(P_m - I) - P_{m-1}^2$$
$$= P_{m-2}P_m - P_{m-1}^2 + P_m - P_{m-2} - I$$

$P_k(x)$ は k 次の多項式で最高次の係数が1だから．$P_{m-2}(x)P_{m-i}(x) - P_{m-1}(x)P_{m-1-i}(x)$, $P_{m-1}(x)P_{m-i}(x) - P_m(x)P_{m-1-i}(x)$ の最高次の係数は0になる．したがって (12), (13) 式をそのまま使うと桁落ちが起こる恐れがある．そこで何らかの工夫が必要になる．

容易に検証できるように，次の関係式が成り立つ．

(3.15) $$P_{m-1}(x)P_{m-i}(x) - P_m(x)P_{m-1-i}(x)$$
$$= P_{i-1}(x), \quad (i=1,2,\ldots,m-1)$$

(3.16) $$P_{m-2}(x)P_{m-i}(x) - P_{m-1}(x)P_{m-1-i}(x)$$
$$= P_{i-2}(x)$$

これらを、(12), (13), (14) 式に代入すると次の式が得られる．

(3.17) $$y_1 = (P_m - P_{m-2} - 2I)^{-1} \sum_{i=1}^{m} (p_{m-i} + p_{i-2})g_i$$

(3.18) $$y_m = (P_m - P_{m-2} - 2I)^{-1} \sum_{i=1}^{m} (p_{m-1-i} + p_{i-1})g_i$$

方程式

(3.19) $$\begin{cases} Dy_k - y_{k+1} = g_k + y_{k-1}, & (k=1,2,\ldots,m-1) \\ -y_{j-1} + Dy_j - y_{j+1} = g_j, & (j=k+1,\ldots,m-1) \end{cases}$$

から．

(3.20) $$y_k = P_{m-k}^{-1}[y_m + P_{m-1-k}y_{k-1} + \sum_{i=k}^{n-1} p_{m-1-i}g_i], \quad (k=2,\ldots,m-1)$$

$$\mathbf{y}_{m-k} = P^{-1}_{m-k-1}[\mathbf{y}_1 + P_{m-k-2}\mathbf{y}_{m-k+1} + \sum_{i=0}^{m-k-2} p_i g_{k+1+i}], \quad (k=1,2,\ldots,m-2) \tag{3.21}$$

が得られる．そして解は

$$\mathbf{x}_k = \frac{2}{n} R^T \mathbf{y}_k \quad (k=1,2,\ldots,m) \tag{3.22}$$

で与えられる．D の固有値は 2 より小さくないから，この process は常に安定である．

(17), (18) 式を (10) 式に代入し (2.33) を使って解を次のようにかくこともできる．

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{2}{n} R^T (P_m - P_{m-2} - 2I)^{-1}[\sum_{i=1}^{k} (p_{m-k-2+i} + p_{k-i})g_i + \sum_{i=k+1}^{m} (p_{m+k-i} + p_{i-k-2})g_i], \quad (k=0,1,\ldots,m-1) \tag{3.23}$$

3.2 熱方程式

G. J. Tee は次の問題を考えた．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < 1) \tag{3.24}$$

$$u(0,t) = f(t), \quad u(1, t) = g(t), \tag{3.25}$$

$$u(x,0) = u(x, T)$$

ここで，f(t), g(t) は周期 T の周期函数である．

(3.26) $\quad \ell = T/m, \quad h = l/N, \quad \sigma = \ell/h^2$

とおき，t 方向を m 等分，x 方向を N 等分して，差分近似する．

(i) 陽表公式

(3.27)
$$u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)$$
$$= h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_i, t_j) + \frac{2}{4!}h^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i, t_j)$$
$$+ \frac{2}{6!}h^6\frac{\partial^6}{\partial x^6}u(x_i + \xi_i, t_j), \qquad (|\xi_i|<h)$$

(3.28)
$$u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)$$
$$= \ell\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) + \frac{\ell^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x_i, t_j)$$
$$+ \frac{\ell^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x_i, t_j + \tau_j), \qquad (0< \tau_j < \ell)$$

と．

(3.29)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$$

を使うと次の式が得られる．

(3.30)
$$u(x_i, t_{j+1}) = \sigma u(x_{i-1}, y_j) + (1 - 2\sigma)u(x_i, t_j)$$
$$+ \sigma u(x_{i+1}, t_j) + h^4T(x_i, t_j)$$

ただし

(3.31) $$T(x_i, t_j) = \frac{1}{12}(6\sigma - 1)h^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i, t_j) + \sigma h^6[\frac{\sigma^2}{3!} \times \frac{\partial^6}{\partial x^6}u(x_i, t_j + \tau_j) - \frac{2}{6!}\frac{\partial^6}{\partial x^6}u(x_i + \xi_i, t_j)]$$

である．$\sigma = 1/6$ にとると，公式誤差は h^6 のオーダーになる．
これから得られる差分方程式

(3.32) $$v_{ij} = \sigma v_{i-1,j} + (1 - 2\sigma)v_{ij} + \sigma v_{i+1,j}$$

の解が，σ を一定に保って，$h \longrightarrow 0$ のとき，(20) 式の解に収束するためには $\sigma \leq 1/2$ でなければならないことが知られている．

(ii) 陰伏公式

(3.33) $$u(x_{i-1}, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_i, t_{j+1}) + \frac{2}{4!}h^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i + \xi_i, t_{j+1})$$

(3.34) $$u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j) = \sigma h^2\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1}) - \frac{\sigma^2}{2!}h^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i, t_{j+1} - \gamma_{j+1})$$

から，次の式が得られる．

(3.35) $$\sigma u(x_{i-1}, t_{j+1}) - (1 + 2\sigma)u(x_i, t_{j+1}) + \sigma u(x_{i+1}, t_{j+1}) + u(x_i, t_j) = \sigma h^4[\frac{2}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i + \xi_i, t_{j+1}) + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i, t_{j+1} - \gamma_{j+1})]$$

これから構成される差分方程式の解は，σ を固定して $h \rightarrow 0$ とすれば，σ の値にかかわらず (24) 式の解に収束することが知られている．

(24)，(25) 式から得られる差分方程式は，

陽表公式を使った場合，

(3.36)
$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 - M\mathbf{x}_M = \mathbf{b}_1 , \\ \mathbf{x}_k - M\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{b}_k , \quad (k=2,3,\dots,m) \end{cases}$$

陰伏公式を使った場合、

(3.37)
$$\begin{cases} N\mathbf{x}_1 - M\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_1 , \\ -\mathbf{x}_{k-1} + N\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k , \quad (k=2,3,\dots,m) \end{cases}$$

となる．ただし、

(3.38)
$$M = (1 - 2\sigma)I + \sigma J, \quad N = (1 + 2\sigma) - \sigma J$$

である．

(3.39)
$$M = T^{-1}DT, \quad D = (1 - 2\sigma)J + 2\sigma G.$$

だから、(36) 式は次のようにかける．

(3.40)
$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = D\mathbf{y}_m + \mathbf{g}_1 , \\ \mathbf{y}_k = D\mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{g}_k , \quad (k=2,3,\dots,m) \end{cases}$$

ただし．

(3.41)
$$\mathbf{y}_j = T\mathbf{x}_j , \quad \mathbf{g}_j = T\mathbf{b}_j$$

である．したがって．

(3.42)
$$\mathbf{y}_k = D^k \mathbf{y}_m + \sum_{i=1}^{k} D^{k-i} \mathbf{g}_i , \quad (k=1,2,\dots,m)$$

が成りたつ．これから

(3.43)
$$\mathbf{y}_m = (I - D^m)^{-1} \sum_{i=1}^{m} D^{m-i} \mathbf{g}_i$$

が得られる． $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_m$ とおくと，

$$y_k = Dy_{k-1} + g_k, \quad (k=1,2,\ldots,m-1) \tag{3.44}$$

が成り立つ。したがって (36) 式の解は、

$$x_j = \frac{2}{N} Ty_j, \quad (j=1,2,\ldots,m) \tag{3.45}$$

で与えられる。

D の固有値は、

$$\lambda_i = 1 - 2\sigma + 2\sigma \cos\frac{i\pi}{N} = 1 - 4\sigma \sin^2\frac{i\pi}{2N}, \quad (i=1,2,\ldots,m)$$

だから、$\sigma \leq \frac{1}{2}$ ならば、この process は安定である。

次に (37) 式を扱う。

$$E = ((1 + 2\sigma)I - 2\sigma G)^{-1} \tag{3.46}$$

とおくと、$N^{-1} = T^{-1}ET$ だから (37) 式は次のようにかける。

$$\begin{cases} y_1 = Ey_m + Eg_1 \\ y_k = Ey_{k-1} + Eg_k, (k=2,3,\ldots,m) \end{cases} \tag{3.47}$$

これから

$$y_m = (I - E_m)^{-1} \sum_{i=1}^{m} E^{m+1-i} g_i \tag{3.48}$$

が得られる。$y_0 = y_m$ とおくと

$$y_k = E(y_{k-1} + g_k), \quad (k=1,2,\ldots,m-1) \tag{3.49}$$

したがって

$$x_k = \frac{2}{N} Ty_j, \quad (j=1,2,\ldots,m) \tag{3.50}$$

が得られる。 E の固有値の絶対値はすべて 1 より小さいから、この process は常に安定である。

§4 Biharmonic equation

領域

$$R: 0 < x < L, \quad 0 < y < M$$

で、方程式

$$\Delta\Delta u(x, y) = f(x, y) \tag{4.1}$$

を考えよう。全境界上で u の値が与えられ、$y = 0$, $y = M$ $(0 \le x \le L)$ で u_y が与えられ、$x = 0$, $x = L$, $(0 \le y \le M)$ で u_{xx} が与えられている場合には、次の差分方程式で (1) 式が近似される。

$$\left\{\begin{array}{l} B\mathbb{x}_1 + C\mathbb{x}_2 + \alpha\,\mathbb{x}_3 = \mathbb{b}_1 \\ C\mathbb{x}_1 + B\mathbb{x}_2 + C\mathbb{x}_3 + \alpha\,\mathbb{x}_4 = \mathbb{b}_2 \\ \alpha\,\mathbb{x}_{k-4} + C\mathbb{x}_{k-3} + B\mathbb{x}_{k-2} + C\mathbb{x}_{k-1} + \alpha\,\mathbb{x}_k \\ \quad = \mathbb{b}_{k-2}, \quad (k=5, \ldots, m) \\ \alpha\,\mathbb{x}_{m-3} + C\mathbb{x}_{m-2} + B\mathbb{x}_{m-1} + C\mathbb{x}_m = \mathbb{b}_{m-1} \\ \alpha\,\mathbb{x}_{m-2} + C\mathbb{x}_{m-1} + B\mathbb{x}_m = \mathbb{b}_m \end{array}\right. \tag{4.2}$$

ただし

$$\Delta x = L/N, \quad \Delta y = M/(m+1), \tag{4.3}$$

$$N = n+1, \quad m = 2p$$

$$\theta_x = \Delta x^2/2(\Delta x^2 + \Delta y^2), \quad \theta_y = \Delta y^2/2(\Delta x^2 + \Delta y^2) \tag{4.4}$$

(4.5) $$R = 1 + 2\cdot\theta_x^2 + 2\cdot\theta_y^2, \qquad \alpha = \theta_y^2/R$$

(4.6) $$A = (I - \theta_x J), \quad B = (A^2 + \theta_y^2 I)/R,$$

$$C = -2\cdot\theta_y A/R$$

である，

(4.7) $$g_i = Tb_i/\alpha \ , \quad Tx_i = y_i, \ (i=1,2,\ldots,m)$$

(4.8) $$E = (1/\theta_y)(I - 2\cdot\theta_x G), \quad D = I + E^2$$

(4.9) $$g_{-1} = g_0 = 0$$

とおくと，(2) 式は次のようにかき直される．

(4.10) $$\begin{cases} y_{-1} = y_0 = 0 \\ y_k = 2Ey_{k-1} - Dy_{k-2} + 2Ey_{k-3} - y_{k-4} \\ \qquad + g_{k-2}, \quad (k=3,4,\ldots,m+2) \\ y_{m+1} = y_{m+2} = 0 \end{cases}$$

行列 P_k, Q_k とベクトル q_k, $(k=-1,0,\ldots,m+2)$ を次の式によって定義する．

(4.11) $$\begin{cases} P_{-1} = P_0 = 0, \quad P_1 = I, \quad P_2 = 0, \\ P_k = 2EP_{k-1} - DP_{k-2} + 2EP_{k-3} - P_{k-4}, \\ \qquad (k=3,4,\ldots,m+2) \end{cases}$$

(4.12) $$\begin{cases} Q_{-1} = Q_0 = Q_1 = 0, \quad Q_2 = I, \\ Q_k = 2EQ_{k-1} - DQ_{k-2} + 2EQ_{k-3} - Q_{k-4}, \\ \qquad (k=3,4,\ldots,m+2) \end{cases}$$

$$(4.13)\quad \begin{cases} q_{-1} = q_0 = q_1 = q_2 = 0 \\ q_k = g_{k-2} + 2Eq_{k-1} - Dq_{k-2} + 2Eq_{k-3} - q_{k-4} \end{cases}$$

すると，(10) 式は次のようになる．

$$(4.14)\quad \begin{cases} y_k = P_k y_1 + Q_k y_2 + q_k, \quad (k=-1,0,\ldots,m+2) \\ y_{m+1} = y_{m+2} = 0 \end{cases}$$

また

$$(4.15)\quad q_k = \sum_{\ell=1}^{k-2} Q_{k-\ell} g_\ell, \quad (k=3,4,\ldots,m+2)$$

$$(4.16)\quad \begin{cases} P_k = -(k-2)E^{k-1} + (k-3)\text{次以下の項} \\ Q_k = (k-1)E^{k-2} + (k-4)\text{次以下の項} \end{cases}$$

である．(14) 式から

$$(4.17)\quad \begin{cases} P_{m+1} y_1 + Q_{m+1} y_2 = -q_{m+1} \\ P_{m+2}\, y_1 + Q_{m+2} y_2 = -q_{m+2} \end{cases}$$

したがって

$$(4.18)\quad \begin{cases} \Delta y_1 = \sum_{k=1}^{m} U_k g_{m+1-k} \\ \Delta y_2 = \sum_{k=1}^{m} V_k g_{m+1-k} \end{cases}$$

が得られる．ただし

$$(4.19)\quad \Delta = Q_{m+2} P_{m+1} - Q_{m+1} P_{m+2}$$

$$(4.20)\quad U_k = Q_{m+1} Q_{k+1} - Q_{m+2} Q_k$$

$$V_k = P_{m+2}Q_k - P_{m+1}Q_{k+1} \tag{4.21}$$

である.

(16)式を使うと

$$\Delta = \left\{-(m+1)(m-1) + m^2\right\}E^{2m} + \cdots\cdots = E^{2m} + \cdots \tag{4.22}$$

$$U_k = \left\{mk - (m+1)(k-1)\right\}E^{m+k-2} + \cdots\cdots = (m+1-k)E^{m+k-2} + \cdots \tag{4.23}$$

$$V_k = \left\{(m-1)k - (k-1)m\right\}E^{m+k-1} + \cdots\cdots = (m-k)E^{m+k-1} + \cdots \tag{4.24}$$

である. したがって (18)式をそのまま使うと桁落ちが生ずる. そこで桁落ちを防ぐために別の漸化式を作る.

$$\left\{\begin{array}{l} U_{-1} = U_0 = 0, \quad U_1 = Q_{m+1}, \\ U_2 = DQ_m - 2EQ_{m-1} + Q_{m-2} \\ V_{-1} = V_0 = 0, \quad V_1 = -P_{m+1}, \\ V_2 = -DP_m + 2EP_{m-1} - P_{m-2} \\ U_k = 2EU_{k-1} - DU_{k-2} + 2EU_{k-3} - U_{k-4} \\ V_k = 2EV_{k-1} - DV_{k-2} + 2EV_{k-3} - V_{k-4} \end{array}\right. \tag{4.24}$$

$$\left\{\begin{array}{l} R_{-1} = R_0 = 0, \quad R_1 = I, \quad R_2 = D \\ S_{-1} = S_0 = 0, \quad S_1 = 2E \\ R_k = D(R_{k-1} - R_{k-3}) + 2E(S_{k-3} - S_{k-2}) + R_{k-4}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k=3,4,\ldots,m+1) \\ S_k = 2E(R_k - R_{k-1}) + S_{k-2} \end{array}\right. \tag{4.25}$$

によって、U_k, V_k, S_k, R_k を求める．すると、$\Delta = R_{m+1}$ である．
したがって、(18) 式は次のようにかける．

$$(4.26)\quad \begin{cases} R_{m+1}y_1 = \sum_{k=1}^{m} U_k g_{m+1-k} \\ R_{m+1}y_2 = \sum_{k=1}^{m} V_k g_{m+1-k} \end{cases}$$

これから、x_1, x_2 は次のようにして求められる．

$$(4.27)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{N} TR_{m+1}^{-1} \sum_{k=1}^{m} U_k g_{m+1-k} \\ x_2 = \frac{2}{N} TR_{m+1}^{-1} \sum_{k=1}^{m} V_k g_{m+1-k} \end{cases}$$

同様にして、x_m, x_{m-1} が求められる．